平成３０年度　わか杉チャレンジフェスティバル（中学生の部）の解説

Ⅰ

(1)① 黒玉・白玉を30段目まで並べると、縦30個、横31個となり、玉の総数は30×31個。
黒玉・ 白玉は同数であるから、30×31÷2＝465
② 31は16番目の奇数であり、図２のように正方形状に並べると玉は1辺が16個となるから、
16×16＝256

(2) 図３のように、$1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+29^2+30^2$を求めるため玉を長方形状に並べると、
縦 2×30＋1＝61、横 1＋2＋3＋・・・＋30＝30×31/2 となるから、長方形状の玉の数は、
61×465＝28365
したがって、求める数は、図よりその1/3であるから、28365×1/3＝9455

Ⅱ

(1) 島のまとまりを、１～５の場合に分けて考える。

島のまとまり	テーブルの構成	何通り
1	（５）	1
2	（４と１），　（３と２）	2
3	（１と１と３），　（１と２と２）	2
4	（１と１と１と２）	1
5	（１と１と１と１と１）	1

よって、全部で、１＋２＋２＋１＋１＝７　　　答え　７通り

(2) 空席なしで、テーブルをa個（aは自然数）並べたとき、
（座り方Ａだけで座れる人数）＝ $2a+2$ ･･･ ①，
（座り方Ｂだけで座れる人数）＝ $4a$ ･･･ ②
テーブル９個使った場合、３つの島とも座り方Ａだけだと座れる人数は24までである。また、３つの島とも座り方Ｂだけだと座ることの出来る人数は４の倍数である。したがって、テーブルが９個までしか使えないとき、３つの島とも座り方Ａだけまたは座り方Ｂだけで、30人を座らせることは不可能である。よって、次の２つの場合で考える。

（ｉ） 座り方Ａの島が１、座り方Ｂの島が２のとき
全部でＮ（９以下の自然数）個のテーブルを使い、そのうち，Ａの島のテーブルがn個とする。
座り方Ａの島のテーブルn個に座る人数は　$2n+2$
座り方Ｂの2つの島に座る人数の合計は　$4(N-n)$
和が30になることから、$(2n+4)+4(N-n)=30$ に Ｎ＝９，８，７，…，１ を代入すると、
Ｎ＝９のとき$n=4$、Ｎ＝８のとき$n=2$、Ｎ＝７のときは $n=0$、で不適。
よって、座り方Ａのテーブル数は２または４。座り方Ｂの島のテーブル数は必ず２個以上だから、

	座り方Ａ	座り方Ｂ
Ｎ＝８ $n=2$	テーブル２個（６人）	テーブル２個（８人）＋ テーブル４個（16人） テーブル３個（12人）＋ テーブル３個（12人）
Ｎ＝９ $n=4$	テーブル４個（10人）	テーブル２個（８人）＋ テーブル３個（12人）

（ⅱ） 座り方Ａの島が２、座り方Ｂの島が１のとき
全部でＮ（９以下の自然数）個のテーブルを使い、そのうち，座り方 Ａ の２つの島のテーブル数の合計がm個（$m \geqq 2$）とすると、ここに座る人数は　$2m+4$
座り方Ｂのテーブル数は（$N-m$）個で、これに座る人数は　$4(N-m)$
人数の和が30になることから、$(2m+4)+4(N-m)=30$ に Ｎ＝９，８，７，…１ を代入すると、Ｎ＝９のとき$m=5$，Ｎ＝８のとき$m=3$。Ｎ＝７のとき $m=1$、で不適。
よって、座り方Ａの２つの島のテーブル数の合計は３または５

	座り方Ａ	座り方Ｂ
Ｎ＝８ $m=3$	テーブル１個（４人）＋ テーブル２個（６人）	テーブル５個（20人）
Ｎ＝９ $m=5$	テーブル１個（４人）＋ テーブル４個（10人） テーブル２個（６人）＋ テーブル３個（８人）	テーブル４個（16人）

(3) 座り方Ｂで着席するとき、座れる人数は必ず４の倍数である。
よって、m人が座れないのは、mが４でわりきれない整数のとき。

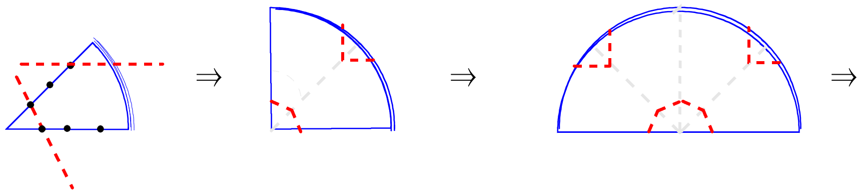
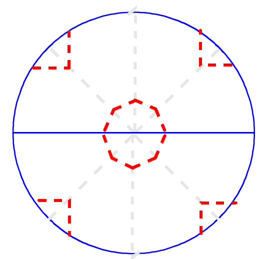
Ⅲ

(1) １０÷２＝５で、大地さんは２ km を５回に分けて走る。その間に４回休憩をとり、12分間休む。
実際に走った時間は48/60時間であるので、時速は10÷0.８＝12.５（km）

(2)① 休憩を４回とっていることを示すグラフは**ア**と**ウ**。ただし、**ア**は同時にスタートしていないので不適。**ウ**が、５回走りその間に４回休憩をとっているグラフである。
② グラフより、差が最も大きいのは、第１回目の休息に入るとき（4/25時間）、または、最後の休憩が終わったとき（21/25時間）である。
（4/25時間後の差）＝（21/25時間後の差）＝ 12.5×4/25－10×4/25 ＝2.5×4/25 ＝ 0.4
よって、差は 0.4km、つまり、400m である。
③ グラフより、走った距離が等しくなるのは７回。また、②より差が400m（周回遅れ）で同じ位置にいる場合が２回。合わせて、９回である。

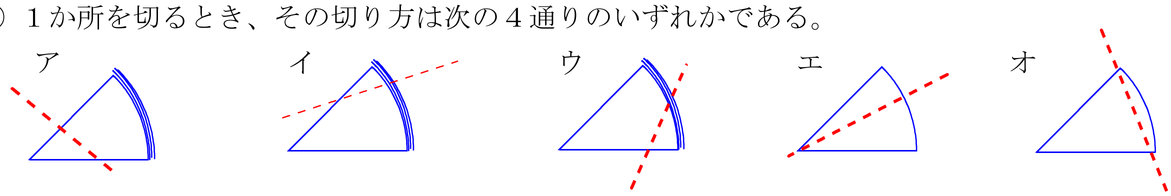
Ⅳ

(1) 切られた直線を書き入れ、対称性に注意しながら紙を開いてみる。

① 紙は６枚に切り分けられることになる。
② 最も面積のが大きいのは、右図のとおり。

(2)① １か所を切るとき、その切り方は次の４通りのいずれかである。



これら4つについて，何枚に切り分けられるかを考察するとよい。
アの場合は、２つに分けられる
イの場合は、５つに分けられる　　（$2^{3-1}+1$）
ウの場合は、５つに分けられる　　（$2^{3-1}+1$）
（※結局、イとウは一見別物だが、同一視してもよいことが分かる。）
エの場合は、８つに分けられる　　2^3
オの場合は、９つに分けられる　　（2^3+1）
よって、考えられるのは、２枚、（$2^{3-1}+1$）枚、2^3 枚、（2^3+1）枚の４通りである。

② ｎ回折りのとき、円は 2^n に分割され、切り方は①と同様に分類できる。
アの切り方をしたときには、２つに切り分けられる。
イ，ウの切り方をしたときは、2^n の 1/2 に１を加えた $2^{n-1}+1$ に切り分けられる。
エの切り方をしたときは、2^n に切り分けられる。
オの切り方をしたときは、2^n に１を加えた 2^n+1 に切り分けられる。

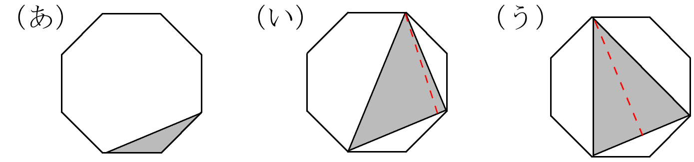
Ⅴ

(1)

t 秒後	0　1　2　3　4　5　6　7　8
Ａの動き	０⇒１⇒２⇒３⇒４⇒５⇒６⇒７⇒０
Ｂの動き	０⇒２⇒４⇒６⇒０⇒２⇒４⇒６⇒０
Ｃの動き	０⇒３⇒６⇒１⇒４⇒７⇒２⇒５⇒０

と動くので、８秒後に３点とも頂点０にくる。

(2) 三角形は次の３通りできる。このうち、面積が最大になるのは（う）である。



三角形の高さ------より明らか

（う）が最初にできるのは、３秒後

(3)① 頂点 n 個分ずつ時計方向に回るとき、t 秒後には、頂点0から累計して何個目（以下、累計という）の頂点にいるかを表にする。

ア $m=8$，$n=6$ のとき ⇒ nt を8でわったときの余りが点の位置

t 秒後	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
累計（nt）	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102…
位置	0	6	4	2	0	6	4	2	0	6	4	2	0	6	4	2	0	6

イ $m=9$，$n=3$ のとき ⇒ nt を9でわったときの余りが点の位置

t 秒後	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
累計（nt）	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51…
位置	0	3	6	0	3	6	0	3	6	0	3	6	0	3	6	0	3	6

ウ $m=9$，$n=4$ のとき ⇒ nt を9でわったときの余りが点の位置

t 秒後	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
累計（nt）	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60	64	68…
位置	0	4	8	3	7	2	6	1	5	0	4	8	3	7	2	6	1	5

エ $m=9$，$n=5$ のとき ⇒ nt を9でわったときの余りが点の位置

t 秒後	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
累計（nt）	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85…
位置	0	5	1	6	2	7	3	8	4	0	5	1	6	2	7	3	8	4

オ $m=9$，$n=6$ のとき ⇒ nt を9でわったときの余りが点の位置

t 秒後	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
累計（nt）	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90	96	102…
位置	0	6	3	0	6	3	0	6	3	0	6	3	0	6	3	0	6	3

以上より、タイプⅠになるのは、**ウ，エ**

② ①より、頂点 n 個分ずつ時計方向に回るとき、t 秒後には、累計 nt 個目の頂点にいる。
正 m 角形の場合、nt が m の倍数になったときに、頂点0に戻る。
タイプⅡとなるのは、 $t<m$ で nt が m の倍数となる t が存在するときである。
つまり「m と n の最大公約数が２以上のとき」である。

Ⅵ

(1) 0.6÷500＝0.0012(倍)

(2) 断面積をS(cm^2)，求める高さを x (m)として、押し上げられる水銀と、そのときの水の重さについての方程式をつくる。

$76\times13.6\times S=100x\times1.0\times S$　より $x=10.336$

よって、10.3（m）