平成２８年度　わか杉チャレンジフェスティバル（中学生の部）の解説

Ⅰ

(1)　2^{10} を計算しなくても、一の位に着目してその変化を調べると、
　2^1 →２　，　2^2→４，　2^3 →８，　2^4 →６，
　2^5 →２　，　2^6→４，　2^7 →８，　2^8 →６，…のように繰り返しの規則性がみえる。
これを利用すると、2^{10}の１の位の数は４

(2)　１～９の整数について、一の位の繰り返しの規則性を調べると、下のような表になる。
　この表より、　$1^5+2^5+3^5+4^5+5^5+6^5+7^5+8^5+9^5$の一の位の和は、
$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$
　よって、求める一の位の数は５

［m^n の一の位の表］

m＼n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	繰り返しの周期
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	１（１のみ）
2	2	4	8	6	2	4	8	6	2	4	8	４（２→４→８→６）
3	3	9	7	1	3	9	7	1	3	9	7	４（３→９→７→１）
4	4	6	4	6	4	6	4	6	4	6	4	２（４→６）
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	１（５のみ）
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	１（６のみ）
7	7	9	3	1	7	9	3	1	7	9	3	４（７→９→３→１）
8	8	4	2	6	8	4	2	6	8	4	2	４（８→４→２→６）
9	9	1	9	1	9	1	9	1	9	1	9	２（９→１）

(3)　上の表を基にして考える。
①　m^n+1が10の倍数となるためには、 m^n の一の位が９になればよい。
　m^n　の一の位が９になるのは
　　$m=3$のとき、$n=2$，６
　　$m=7$のとき、$n=2$，６
　　$m=9$のとき、$n=1$，３，５，７，９　　　で、合計９組

②　m^n，n^m の一の位がともに９となるのは、m，n の一の位が９のときだけである。
　よって、m^n+1が最大となるのは $m=19$、$n=19$のときである。

Ⅱ　次のような勝敗表をつくる。

	なまはげ	スギッチ	んだっち	秋田犬シロ
なまはげ	△	○	×	○
スギッチ	×	△	△	○
んだっち	○	△	△	×
秋田犬シロ	×	×	○	△

＜考え方１＞ 常識的判断
　なまはげを選ぶ。
（表から、勝てる相手が最も多い。負ける相手が最も少ない。）

＜考え方２＞ 一手裏をよむ判断
　んだっちを選ぶ。
（常識的に考えれば、相手はなまはげを選ぶ。なまはげに勝てるんだっちを選べばよい。）

＜考え方３＞ 二手裏をよむ判断
　秋田犬シロを選ぶ。
（相手が一手裏を読んで、んだっちを選んだとすると、それに勝てる秋田犬シロを選べばよい。）

＜考え方４＞ 三手裏をよむ判断

Ⅲ

(1)　これは、地図で実際に線分をかくなどして考える以外にも、$\frac{a}{8}$が既約分数である組み合わせを求める考え方がある。(※既約分数･･･約分できない分数)

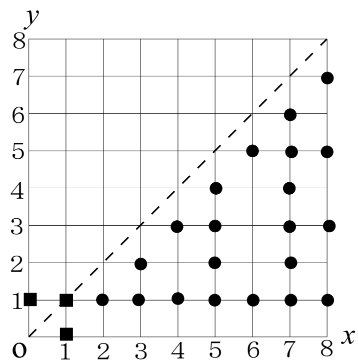
交差点Ｐ(８，１)を$\frac{1}{8}$として考えると、$\frac{1}{8}$は約分できない。この交差点Ｐと原点を結んだ線分ＯＰは（＊）を満たす線分である。

交差点Ｐ(８，２)を$\frac{2}{8}$として考えると、$\frac{2}{8}$は約分できる。　この交差点Ｐと原点を結んだ線分ＯＰは（＊）を満たさない線分。

同様にして考えると、約分できない分数（※既約分数）になる交差点Ｐ$\frac{1}{8}$、$\frac{3}{8}$、$\frac{5}{8}$、$\frac{7}{8}$と原点を結んだ線分ＯＰが（＊）を満たす線分となる。よって、４本。

(2)　まず、図の右下部分について、$\frac{a}{b}$　($a < b \leqq 8$)が既約分数である組み合わせを求めて考えればよい。(●は条件を満たす交差点)

図



b＝２のとき　a＝１
b＝３のとき　a＝１，２
b＝４のとき　a＝１，３
b＝５のとき　a＝１，２，３，４
b＝６のとき　a＝１，５
b＝７のとき　a＝１，２，３，４，５，６
b＝８のとき　a＝１，３，５，７

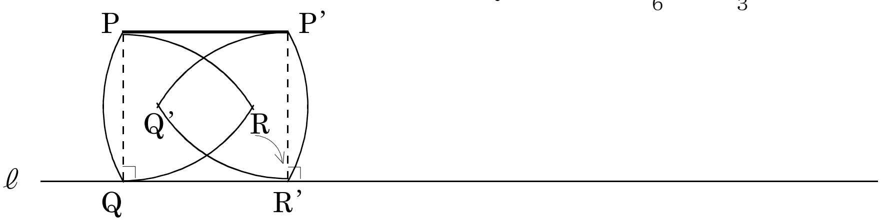
--- の右下部分に、（＊）を満たす線分が２１本あることが分かる。
--- の左上部分にも同じ本数の２１本あり、さらに原点と(1, 0)，(0, 1)，(1, 1)を結ぶ３本（■と原点を結ぶ線分）を加えると、全部で２１×２＋３＝４５本となる。

Ⅳ

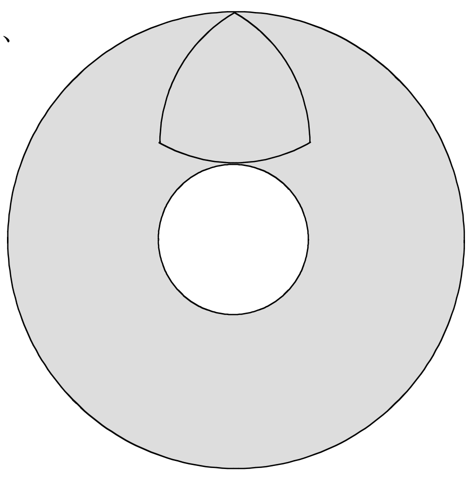
(1)　半径10cmの円の、(円周の$\frac{1}{6}$）の３つ分である。

$2 \times 10 \times \pi \times \frac{1}{6} \times 3 = 10\pi$（cm）

(2) ①　点Ｐは高さが一定のまま動くので、 PP'＝QR'＝$20\pi \times \frac{1}{6} = \frac{10}{3}\pi$（cm）



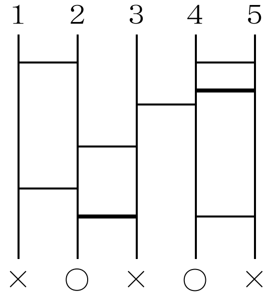
②　「ルーローくん」は円の周りを、同じ幅で掃除するので、掃除する部分の面積は、右図に示した部分である。



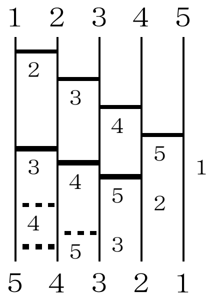
よって、
$15^2 \times \pi - 5^2 \times \pi = 200\pi$（cm²）

V

(1)①　解答は複数ある。 右は、シンプルな解答例。



②　規則性に注目して考えることがポイント。



・４本の　━ 棒を左の図のように入れると、１が一番右に移動し、2,3,4,5が１つずつ左に移動する。

・２を、右から２番目に移動させるために ━ 棒（３本）を入れる。

同様にして、下段の右から１，２，３，４，５と決定していくと、

４＋３＋２＋１＝１０　で１０本の横棒が必要であることが分かる。

※　なお、n 人用のあみだくじを、逆順に入れ替わるあみだくじにするための必要な横棒の最小本数は、$\dfrac{n(n-1)}{2}$ です。詳しい証明は、高校で習う数学的帰納法という方法を用います。勉強してみてください。

(2)①　奇数は奇数どうし、偶数は偶数どうしの交換になるので分けて考察。

＜奇数＞　４個の奇数を交換するために、(1)の考え方を使って、

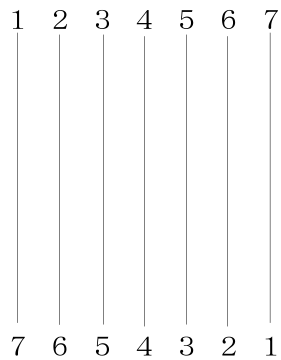
３＋２＋１＝６　６本

＜偶数＞　３個の偶数の交換するために、

２＋１＝３　　３本

よって、横棒は　６＋３＝９で９本必要である。

図４



②　これも、奇数、偶数の場合に分けて考察する。

＜奇数＞　$n+1$ 個の奇数を交換にするために、

$n+(n-1)+\cdots+3+2+1$　　…（ア）

＜偶数＞　n 個の偶数の交換するために、

$(n-1)+\cdots+3+2+1$　　…（イ）

（ア）＋（イ）を工夫して計算すると、n^2　となる。

※　（ア）や（イ）の計算は、いろいろな求め方がある。

（例）（ア）の計算のやり方

$n+(n-1)+\cdots+3+2+1$ の数の並びを反対にした $1+2+\cdots+(n-1)+n$ を加えて考えると、

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & n & +(n-1)+ & \cdots & +3+ & 2 & +1 \\
+) & 1+ & 2 & + & \cdots & + & (n-1)+n \\
\hline
 & (n+1)+ & (n+1)+ & \cdots & + & (n+1)+ & (n+1)
\end{array}
$$

よって、$(n+1)$ が n 個できるので、和は $n(n+1)$ となる。

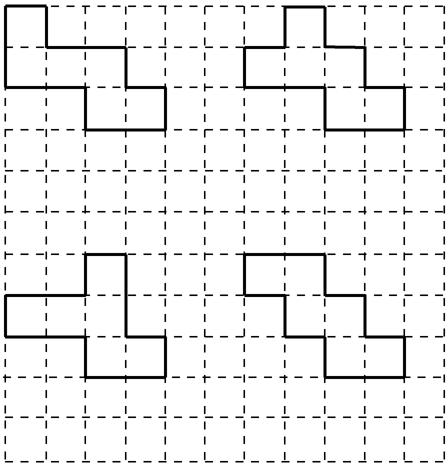
同じ数を加えたので、半分にするために２で割る。

よって、$n+(n-1)+\cdots+3+2+1$ の和は、$\dfrac{n(n+1)}{2}$　となる。

同様にして（イ）も考えることができる。

Ⅵ

(1)



左の４つから２つを答える。

(2) ポイントは「虫になったつもりで表面を歩くこと」と、「向かい合う面の目の和が７になること」の二つの原則で考えていけばよい。

例えば、下の図のように整理していくと、空間を平面にして考えることができる。

	2	
3	1	4
	5	

１から２を向くと「後ろに５　左に３　右に４」

①

1	3	6		
		2	4	5

１から３に前進すると右に２がある。

1	5	6		
		3	2	4

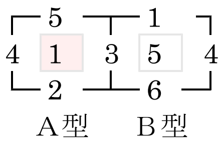
１から５に前進すると右に３がある。

②　下の図のように整理すると、規則が見えてくる。

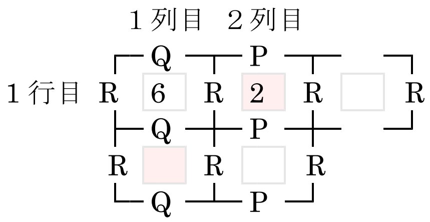
P 面…１または６、Q 面…２または５、R 面…３または４　（＊これはA型もB型も共通）

［上から見た図］

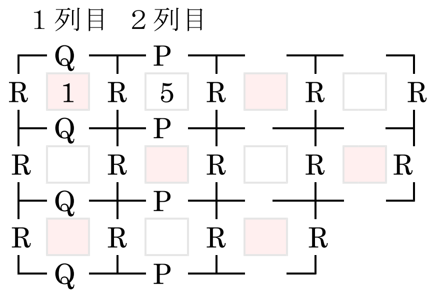
上の層



中の層



下の層



上の層は、各面が確定する。

しかし、中の層からは、P,Q,R 面だけが決まる。

・１行目面は、P,Q ありえない→R
・１列目面は、P,R ありえない→Q
・２列目面は、Q,R ありえない→P
・２行目面は、P,Q ありえない→R
…

・１行目面は、P,Q ありえない→R
・１列目面は、P,R ありえない→Q
・２列目面は、Q,R ありえない→P
・２，３行目面は、P,Q ありえない→R
…

上の図より、R となるため、答えは３，４となる。