平成 25 年度　　わか杉チャレンジフェスティバル解答（中学校）

エントリーナンバー	－中－	氏名	

I

(1)	①	11　個
(1)	②	理由(例) 直線ＡＣの傾きは，横（右）方向に 7 進み，たて（下）方向に 5 進むので，傾きは（正の向きに直すと）5/7 である。ここで，分母分子の 5 と 7 に共通な約数は 1 以外にない。（これを，互いに素という。） もし，直線ＡＣが，途中にある正方形の頂点Ｐを通ったとすると，直線ＡＰの傾きも 5/7 となる。しかし，5 と 7 は 1 以外に共通な約数をもたないので，ＡＣ間にはＰはない。 したがって，正方形の頂点を通らない。
(2)		14　個

II

(1)	エ	(2)	ア，エ

III

(1)	図 3	ウ	図 4	イ	図 5	ア
(2)	9.8　cm		(3)	4.6　cm		

IV

(1)	0　時　$27\frac{7}{9}$　分	(2)	1　時　$5\frac{5}{9}$　分

V

(1)	7　回	(2)	9　回

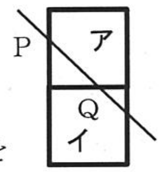
VI

(1)		1000π　cm^3		
(2)	切る	$(20\sqrt{2}-20)\pi$　cm	容積の和	$(9000-6000\sqrt{2})\pi$　cm^3

平成 25 年度　わか杉チャレンジフェスティバル解説と配点（中学校）

Ⅰ	(1)①5 点，②10 点，(2)7 点で 22 点満点。
Ⅱ	(1)，(2)それぞれ 7 点で 14 点満点。
Ⅲ	(1)それぞれ 2 点，(2)，(3)それぞれ 7 点で 20 点満点。
Ⅳ	(1)，(2)それぞれ 7 点で 14 点満点。
Ⅴ	(1)，(2)それぞれ 7 点で 14 点満点。
Ⅵ	(1)8 点，(2)それぞれ 4 点で 16 点満点。

Ⅰの考え方



(1)　①　実際にたて，横の線を図２にかき入れて数えてもよい。
しかし，次のように考えると，(2)も容易に解決できる。
右図は，直線が正方形の辺上の１点Ｐから入り，点Ｑからぬける様子を示している。

すると，点Ｐ（入力点）が発生すると，正方形**ア**の内部を通ることが分かり，
点Ｑ（出力点）が発生すると，正方形**イ**の内部を通ることが分かる。
（これを数学の世界では，「**１対１対応の考え**」という。）

この問いでは，最初の正方形（頂点Ａを含む最小の正方形）の頂点Ａを含む２本の辺を除くと，たて方向には，６本の辺，横方向には，４本の辺があるので，

（入力点の数 6）＋（出力点の数 4）

の 10 の点が発生し，10 個の正方形の内部を通っている。それに，直線は最初の正方形の内部を通っている。したがって，直線が内部を通る正方形の数は，10+1=11(個)である。

②　直線ＡＣの傾きは，横（右）方向に７進み，たて（下）方向に５進むので，傾きは（正の向きに直すと）5/7 である。ここで，分母分子の 5 と 7 に共通な約数は 1 以外にない。（「**互いに素**」という。）

もし，直線ＡＣが，途中にある正方形の頂点Ｐを通ったとすると，直線ＡＰの傾きも 5/7 となる。しかし，5 と 7 は互いに素なので，ＡＣ間にはＰはない。
（「もし，そうだとすると，おかしいこと（矛盾）が生ずる…」という説明の方法を数学の世界では「**背理法**」という。）

②で，逆に正方形の頂点を通る例を考えてみる。たて 4 ㎝，横 6 ㎝の場合，直線ＡＣの傾きは 4/6 である。4 と 6 は共通な約数 2 を持つので，傾きは 2/3 となる。これは，横に 3 進み，たてに 2 進んだ点Ｐ（正方形の頂点）を通ることを表している。

また，xy 平面上の直線として，次のように考えることもできる。ＡＢ，ＢＣをそれぞれ y 軸，x 軸としてみると，直線ＡＣの式は，y=－5/7x+5 となる。この x に 1，2，3，4，5，6 を代入しても y の値は自然数とならないから，直線ＡＣは正方形の頂点を通らない。

(2) 直方体でも(1)①の考えができる。最初の立方体を除くと，たて6本，横4本，高さ3本の辺があり，最初の立方体の内部を通っている。したがって，

$$6+4+3+1=14(個)$$

Ⅱの考え方

(1) エ　部活動に行くと答えた人の目盛りを数えると午前で約4つの目盛り，午後の17時までが約5目盛り，17時以降と合わせても全部で10目盛りに満たない。日曜日全体の目盛りは明らかに10目盛りの2倍以上有る。したがって，全体の目盛りの50%という割合は不適切である。

(2) ア　2年生全員が勉強する時間を10分ずつ多くすれば，平均値も10分多くなる。

イ　平均値の入っている階級の人だけで10分ずつ勉強しても，全体の平均値を10分押し上げるには勉強時間が少ない。

ウ　37.5以上の人数が，37.5分未満の人数の2倍いる，とは限らない。

エ　中央値の35分以上の人が勉強する時間を20分ずつ多くするということは，2年生の半数以上の人が20分ずつ多くすることになるから，全体で平均値は10分以上多くなる。

オ　半数程度が10分ずつ多く勉強しても，全体の平均値は10分以上多くならない。

Ⅲの考え方

(1) ぜひ，実験して自分で試してみよう！（氷は溶けると体積が小さくなる。）

(2) 氷の重さが180 gだから，その重さの分の水として溶けることになり，体積は180 cm^3となる。すなわち，$200-180=20(cm^3)$の分の体積が減る。底面積が$100cm^2$なので，高さにして$20\div100=0.2$cm減ることになる。

したがって，$10-0.2=9.8$(cm)

(3) 水位4 ㎝に惑わされてはいけない。最初の水$280cm^3$と氷が溶けたときの水$180cm^3$の合計$460cm^3$の体積と底面積$100cm^2$で考える。

したがって，$(280+180)\div100=4.6$(cm)

Ⅳの考え方

長針は50分で360° 進むから，1分間に7.2° 進む。短針は10時間で360° 進むので，1時間で36° 進む。これは50分で36° ということから，1分間に0.72° 進む。

(1) x_1分後の長針，短針の進む角度をそれぞれy_1，y_2とすると，$y_1=7.2x_1$，$y_2=0.72x_1$である。このとき，長針の方が速く進むので，長針と短針の差はy_1-y_2で表される。一直線になるとす

ると，長針と短針との角度が 180° となればよいから，$y_1-y_2=180$，すなわち

$$7.2x_1-0.72x_1=180$$

これを解くと，$x_1=\frac{250}{9}=27\frac{7}{9}$ 。したがって，0 時 $27\frac{7}{9}$分に短針と長針が一直線になる。

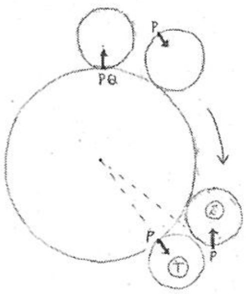
(2) x_2分後に重なるとすると，長針と短針との角度が 360° となればよいから，

$$7.2x_2-0.72x_2=360$$

これを解くと，$x_2=\frac{500}{9}=55\frac{5}{9}$ 。これは，1 時間と $5\frac{5}{9}$ 分を表す。

したがって，1 時 $5\frac{5}{9}$ 分にはじめて短針と長針が重なる。

Vの考え方



(1) 円 A と円 B の周の比は 2：7 である。点 P が円 B の周上に初めてくる（接する）までに，円 A は円 B の周上の $\frac{2}{7}$ まわる。よって，ふたたび図 2 の位置にもどるまでに，点 P は 7 回接する。

（円 A は円 B の周りを 2 周回ることになる。）

(2) 右の図で，矢印(↑)はⓈの位置にくるまでに 1 回転し，Ⓣの位置にくるまでには $1\frac{2}{7}$ 回転している。（点 P がスタートして初めて円と接するまでに，矢印(↑) は一度だけ真上を向く。）

(1)より，これを 7 回くり返すから，矢印は，$1\frac{2}{7}\times 7=9$(回) 真上を向く。

VIの考え方

(1) 底面の円周が 20π cm ということから，半径は，$20\pi\div 2\pi=10$(cm)である。

したがって，容積は，$\pi\times 10^2\times 10=1000\pi$ (cm^3)

(2) 二つの曲げわっぱのそれぞれの半径の和は，もとの曲げわっぱの半径に等しくなるから，(1)より，小さいほうの曲げわっぱの底面の半径を x cm とすると，大きいほうの曲げわっぱの底面の半径は$(10-x)$cm と表される。

高さが等しいので，容積の比は底面積の比に等しいから，

$$\pi x^2 : \pi\times(10-x)^2=1:2$$

これを解くと，$x=-10\pm 10\sqrt{2}$　　$x>0$ だから，$x=-10+10\sqrt{2}$

よって，小さいほうの曲げわっぱの半径が $10\sqrt{2}-10$(cm)だから，円周は

$2\pi\times(10\sqrt{2}-10)=(20\sqrt{2}-20)\pi$ (cm)となり，この長さところで切ればよい。

また，容積の和は，

$\pi\times(10\sqrt{2}-10)^2\times 10+\pi\times(20-10\sqrt{2})^2\times 10=(9000-6000\sqrt{2})\ \pi$ (cm^3)